Klaus Meerkötter

25. August 2011

Bemerkungen zu den komplexen Zahlen und zur komplexen Wechselstromrechnung

Vorbemerkungen. Gelegentlich wird das Attribut *komplex* mit dem Begriff kompliziert in Verbindung gebracht, so dass – zumal bei Anfängern – häufig der Eindruck entsteht, als handele es sich bei den komplexen Zahlen und der komplexen Rechnung um etwas Schwieriges und Unanschauliches. Gefördert wird dieser Eindruck noch durch die unglückliche Namensgebung für die Komponenten einer komplexen Zahl, die nur im Rahmen der historischen Entwicklung zu verstehen ist. Im Zusammenhang mit der Beschreibung physikalischer Vorgänge stößt man daher nicht selten auf die Auffassung, allein der *Realteil* einer komplexen Größe repräsentiere etwas Reales, also Wirkliches, während der *Imaginärteil* nur etwas Eingebildetes oder Unwirkliches sei. Irritationen entstehen häufig auch dadurch, dass komplexe Größen – insbesondere im technischen Bereich – eigens gekennzeichnet werden. Studierende unterliegen hierdurch häufig dem Irrtum, komplexe Zahlen müssten völlig anders behandelt werden als reelle, obwohl mit Ausnahme der Ordnungsrelationen komplexe Zahlen genau den gleichen Gesetzen gehorchen wie die reellen. Schließlich wird in der technischen Literatur die imaginäre Einheit häufig gemäß $j = \sqrt{-1}$ definiert. Einem Studierenden, dem über viele Jahre erklärt wurde, man könne aus negativen Zahlen keine Wurzeln ziehen, muss dieses Vorgehen rätselhaft, mystisch und geheimnisvoll erscheinen. Im Folgenden werden einige Grundlagen aus dem Bereich der komplexen Analysis rekapituliert, und zwar soweit sie für die Entwicklung der komplexen Wechselstromrechnung von Bedeutung sind.

Die in diesem Text verwendeten mathematischen Methoden und Ergebnisse sind wissenschaftliches Allgemeingut und daher in sehr vielen Standardlehrbüchern der Funktionentheorie zu finden. Es sei indes darauf hingewiesen, dass der Autor viele Anregungen durch die Lektüre des Springer-Lehrbuchs „Funktionentheorie I" von Remmert und Schumacher[1] erhalten hat.

Definition der komplexen Zahlen. Komplexe Zahlen sind nichts anderes als (geordnete) Paare reeller Zahlen. Eine komplexe Zahl z kann also in der Form

$$z = (x,\ y)$$

dargestellt werden, wobei x und y reelle Zahlen sind. Die erste Komponente, x, heißt Realteil von z und die zweite, y, Imaginärteil von z. Man schreibt $x = \operatorname{Re} z$ bzw. $y = \operatorname{Im} z$. Bezüglich der Gleichheit, der Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen verhalten sich komplexe Zahlen genau wie Vektoren in der Ebene. Zwei komplexe Zahlen $z_1 = (x_1,\ y_1)$ und $z_2 = (x_2,\ y_2)$ werden als gleich bezeichnet, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$. Die

[1] Remmert, R. und Schumacher, G.: Funktionentheorie I. Springer-Lehrbuch, 5. Auflage 2002.

Addition zweier komplexer Zahlen $z_1 = (x_1,\ y_1)$ und $z_2 = (x_2,\ y_2)$ wird komponentenweise definiert, so dass das Ergebnis der Addition, die *Summe* $z_1 + z_2$, wie folgt lautet:

$$z_1 + z_2 = (x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2) := (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)\ .$$

Die Rolle der Null wird von dem Nullvektor bzw. der komplexen Zahl $0 := (0,\ 0)$ übernommen.

Die Multiplikation einer komplexen Zahl $z_1 = (x_1,\ y_1)$ mit einer reellen Zahl x_2 wird definiert gemäß

$$z_1 x_2 = (x_1,\ y_1) \cdot x_2 = (x_1 x_2,\ y_1 x_2) \quad \text{bzw.} \quad x_2 z_1 = x_2 \cdot (x_1,\ y_1) = (x_2 x_1,\ x_2 y_1)\ .$$

Wegen der Kommutativität der reellen Multiplikation ist also auch diese Operation kommutativ, d. h. $z_1 x_2 = x_2 z_1$.

Das Besondere der komplexen Zahlen wird erst bei der *Multiplikation komplexer Zahlen* miteinander deutlich. Die Festlegung der *Multiplikation* zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 wirkt im ersten Moment ein wenig künstlich. Das Produkt $z_1 z_2$ wird nämlich definiert durch[2]

$$z_1 z_2 = (x_1,\ y_1) \cdot (x_2,\ y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + y_1 x_2)\ .$$

Die Rolle der Eins übernimmt die komplexe Zahl $(1,\ 0)$, denn es gilt stets

$$(1,\ 0) \cdot (x,\ y) = (x,\ y) \quad \text{also} \quad (1,\ 0) \cdot z = z\ .$$

Wir setzen daher $1 := (1,\ 0)$.

Führen wir noch die imaginäre Einheit $j := (0,\ 1)$ ein[3], so können wir jede komplexe Zahl $z = (x,\ y)$ in der Form

$$z = (x,\ 0) + (0,\ y) = (1,\ 0) \cdot x + (0,\ 1) \cdot y = x + jy$$

darstellen. Man kommt zu genau denselben Rechenvorschriften für die Addition wie für die Multiplikation, wenn man berücksichtigt, dass das Quadrat der imaginären Einheit, also $j^2 := (0,\ 1) \cdot (0,\ 1)$, durch $(-1,\ 0) = -1$ gegeben ist, und formal genauso rechnet wie mit den reellen Zahlen. Für das Produkt der Zahlen $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$ erhält man beispielsweise

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)\ .$$

Der Vollständigkeit halber sei daran erinnert, dass die Multiplikation komplexer Zahlen genau wie deren Addition dem *Kommutativgesetz* gehorcht, d. h.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{bzw.} \quad z_1 z_2 = z_2 z_1\ ,$$

[2] Eigentlich wird die Menge der zweidimensionalen Vektoren $\mathbb{V} = \{(x,\ y) : x,\ y \in \mathbb{R}\}$ erst durch diese Form der Multiplikation zu $\mathbb{C}$, d. h. zur Menge der komplexen Zahlen.

[3] Während in der Mathematik die imaginäre Einheit durchweg mit i bezeichnet wird, hat sich hierfür in der Technik und vor allem in der Elektrotechnik der Buchstabe j durchgesetzt. Der Buchstabe i bleibt reserviert für die Bezeichnung des Momentanwerts des elektrischen Stromes.

dass die *Assoziativgesetze* gelten, d. h.

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad \text{bzw.} \quad z_1 \cdot (z_2 z_3) = (z_1 z_2) \cdot z_3 \ ,$$

und dass das *Distributivgesetz* gilt, d. h.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \ .$$

Zu einer komplexen Zahl $z \neq 0$ kann man stets eine weitere komplexe Zahl z^{-1} angeben, so dass gilt

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1 \ .$$

Zum Nachweis der Richtigkeit dieser Behauptung setzen wir $z^{-1} = x' + jy'$ und betrachten die Gleichung

$$zz^{-1} = (x + jy) \cdot (x' + jy') = xx' - yy' + j(xy' + yx') = 1 \ ,$$

die wir auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

schreiben können. Da die Determinante der Matrix $x^2 + y^2$ lautet und genau dann verschieden von null ist, wenn $z \neq 0$ gilt, hat diese Gleichung genau eine Lösung, nämlich

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

bzw.

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2} \ . \tag{1}$$

Die Division zweier komplexer Zahlen kann somit auf die Multiplikation zurückgeführt werden:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (x_1 + jy_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - j\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \ . \tag{2}$$

Komplexe Konjugation und Betrag. Die Zahl $z^* = x - jy$ bezeichnet man als die zu z *konjugiert komplexe Zahl* und die Operation des Übergangs von z auf z^* nennt man demgemäß *komplexe Konjugation* oder – der Einfachheit halber – *Konjugation.* Bild 1 zeigt die Darstellung der komplexen Zahl $z = x + jy$ und der zugehörigen konjugiert komplexen Zahl $z^* = x - jy$ als Vektoren (Pfeile) in der komplexen Ebene. Die komplexe Konjugation gehorcht folgenden Regeln, die sowohl leicht zu beweisen als auch leicht zu

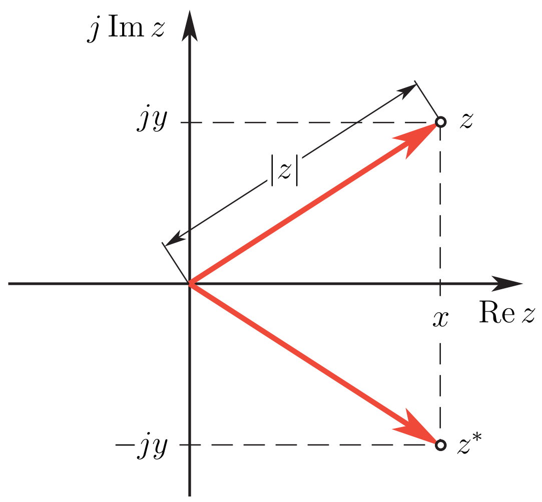

Bild 1: Darstellung der komplexen Zahl z und der konjugiert komplexen Zahl z^*

merken sind:

$$(z^*)^* = z \ ,$$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \ ,$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \ ,$$

$$(z^{-1})^* = (z^*)^{-1} \ , \qquad z \neq 0 \ ,$$

$$(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^* \ , \qquad z_2 \neq 0 \ .$$

Unter Verwendung der konjugiert komplexen Zahl z^* können wir wie folgt Real- und Imaginärteil von z ausdrücken:

$$x = \mathrm{Re}\,z = \frac{z + z^*}{2} \ , \quad y = \mathrm{Im}\,z = \frac{z - z^*}{2j} \ .$$

Die Multiplikation von z mit z^* ergibt

$$zz^* = x^2 + y^2 \ .$$

Die (positive) Wurzel dieses Ausdrucks, d. h.

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2} \ ,$$

heißt *Betrag* der komplexen Zahl z. Für den Betrag gilt also stets

$$|z| \geq 0 \ .$$

Anschaulich ist der Betrag gleich der Länge des Pfeils, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Punkt z reicht (siehe Bild 1). Der Betrag von z^* ist offenbar gleich dem Betrag von z.

Man erkennt, dass die komplexe Zahl z genau dann null ist, wenn ihr Betrag null ist:

$$|z| = 0 \iff z = 0 \ . \tag{3}$$

Aus $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ folgen sofort die Ungleichungen

$$(\operatorname{Re} z)^2 \leq |z|^2 \qquad \text{und} \qquad (\operatorname{Im} z)^2 \leq |z|^2$$

und somit

$$-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z| \qquad \text{und} \qquad -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z| \ . \tag{4}$$

Die Betragsbildung gehorcht ähnlich einfachen Regeln wie die komplexe Konjugation:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \ , \tag{5}$$

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} \ , \qquad z \neq 0 \ ,$$

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2| \ , \quad z_2 \neq 0 \ .$$

Drückt man diese Regeln in der äquivalenten Form

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \ , \tag{6}$$

$$|z^{-1}|^2 = |z|^{-2} \ , \qquad z \neq 0 \ ,$$

$$|z_1/z_2|^2 = |z_1|^2/|z_2|^2 \ , \quad z_2 \neq 0$$

aus, so lassen sie sich besonders einfach mit der Konjugation nachweisen. Die erste Regel, Gleichung (6), ergibt sich beispielsweise wie folgt:

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot (z_1 z_2)^* = z_1 z_2 z_1^* z_2^* = |z_1|^2 |z_2|^2 \ .$$

In entsprechender Weise lassen sich auch die beiden anderen Regeln nachweisen.

Das Produkt $z_1 z_2$ ist nur dann null, wenn mindestens eine der beiden Zahlen z_1 oder z_2 null ist:

$$z_1 z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \lor z_2 = 0 \ .$$

Diese Eigenschaft, die uns aus dem Bereich der reellen Zahlen sehr geläufig ist, gilt also auch für komplexe. Sie folgt sofort aus (5) unter Berücksichtigung der Äquivalenz (3).

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren hat diese Eigenschaft bekanntlich nicht. Fassen wir die komplexen Zahlen $z_1 = (x_1,\ y_1)$ und $z_2 = (x_2,\ y_2)$ als reelle zweidimensionale Vektoren auf, so wird deren Skalarprodukt ja wie folgt definiert:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 \ .$$

Unter Verwendung der komplexen Konjugation und des Realteiloperators lässt sich dieses Skalarprodukt auch wie folgt ausdrücken:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re} z_1 z_2^* \ .$$

Unter Beachtung der linken Ungleichung in (4) folgt hieraus

$$-|z_1 z_2| \leq \langle z_1, z_2 \rangle \leq |z_1 z_2| \ . \tag{7}$$

Das Skalarprodukt $\langle z_1, z_2 \rangle$ ist natürlich null, wenn einer der beiden Faktoren z_1 oder z_2 null ist. Es ist aber auch dann null, wenn z_1 und z_2 senkrecht aufeinander stehen. Dies lässt sich besonders einfach mit Hilfe der Polardarstellung der komplexen Zahlen zeigen (vgl. Seite 14).

Die Dreiecksungleichung. Für den Betrag einer Summe gilt die Ungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \ ,$$

die auch als *Dreiecksungleichung* bezeichnet wird.

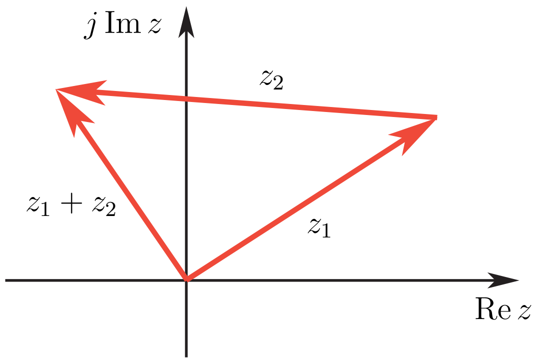

Bild 2: Zur anschaulichen Interpretation der Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Diese Ungleichung ist anschaulich evident (siehe Bild 2); sie lässt sich formal wie folgt nachweisen:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\langle z_1, z_2 \rangle$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| - 2\Big(\underbrace{|z_1 z_2| - \langle z_1, z_2 \rangle}_{\geq 0, \text{ siehe } (7)}\Big)$$

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \implies |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \ .$$

Hat man einmal die komplexe Konjugation und den Begriff des Betrages zur Hand, dann lässt sich die Inverse z^{-1} (siehe (1)) besonders einfach herleiten, und zwar durch Erweiterung des Bruchs $1/z$ mit z^*:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} \ .$$

Ein ähnliches Argument gilt konsequenterweise auch für die Division zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$. Die Zerlegung des Quotienten z_1/z_2 mit $z_2 \neq 0$ nach Real- und Imaginärteil ergibt sich nämlich wie folgt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \ .$$

Siehe hierzu Gleichung (2).

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so lässt sich feststellen, dass komplexe Zahlen nichts anderes sind als (geordnete) Paare reeller Zahlen, für die die vier Grundrechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) mit Hilfe der Operationen definiert werden, die auch für reelle Zahlen gelten. Die komplexe Zahl $(1,\ 0)$ wird mit der "1" identifiziert und die Zahl $j := (0,\ 1)$ wird als imaginäre Einheit bezeichnet. Auf Grund der Definition der Multiplikation besitzt j die Eigenschaft $j^2 = -1$. Akzeptiert man also die Definition der komplexen Addition und vor allem der komplexen Multiplikation, so ergeben sich alle anderen Eigenschaften zwangsläufig. Komplexe Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil verhalten sich bezüglich Addition und Multiplikation genauso wie reelle Zahlen und können folglich mit diesen identifiziert werden. Die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}$, ist also in der Menge der komplexen Zahlen, $\mathbb{C}$, enthalten.

Welche Vorteile bringt nun die Verwendung komplexer Zahlen?

Als erstes ist die Tatsache zu nennen, dass durch Erweiterung des Zahlenbereichs von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ Gleichungen der Form

$$z^2 + 1 = 0 \qquad (z+1)^2 + 9 = 0$$

oder allgemeiner

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \ , \quad a_\nu \in \mathbb{R} \ , \ n \geq 1$$

immer eine Lösung haben (*Fundamentalsatz der Algebra*). Selbst wenn die Koeffizienten a_ν in dem angegebenen Polynom komplexe Zahlen sind, gibt es immer eine Lösung, die in $\mathbb{C}$ liegt. Das heißt, eine nochmalige Erweiterung des Zahlenbereichs ist nicht erforderlich. Als Folge des Fundamentalsatzes der Algebra lässt sich ein Polynom der Form

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \ , \quad a_\nu \in \mathbb{C} \ , \ n \geq 1$$

stets als ein Produkt von n *Linearfaktoren* darstellen:

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = \prod_{\nu=1}^{n}(z - z_\nu) \ , \quad z_\nu \in \mathbb{C} \ .$$

Die Zahlen z_ν, die nicht alle verschieden voneinander sein müssen, heißen *Nullstellen* des Polynoms P.

Ein weiterer Vorteil, der insbesondere in der Elektrotechnik eine herausragende Rolle spielt, wird im Zusammenhang mit der Darstellung der trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion deutlich. Aus diesem Grunde wenden wir uns im Folgenden dieser Funktion zu. Bei unseren Betrachtungen werden wir gelegentlich Funktionen einer komplexen Variablen (komplex) differenzieren. Aus diesem Grunde erinnern wir zunächst an die

Komplexe Differentiation. Eine Funktion f heißt an einer Stelle z *komplex differenzierbar*, falls f in einer Umgebung von z definiert ist und der Grenzwert

$$\boxed{f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}}$$

existiert, und zwar unabhängig davon, wie die (komplexe) Größe h gegen null geht. Wie im Reellen wird die Funktion f' als *Ableitung* (von f) bezeichnet.

Statt mit f' wird vor allem in der Physik und der Technik häufig die Ableitung einer Funktion f als Quotient in der Form df/dz geschrieben. Man spricht in diesem Fall gelegentlich von dem *Differentialquotienten.*

Sind zwei Funktionen f und g komplex differenzierbar, so trifft dies auch für die Summe $f+g$, das Produkt fg und den Quotienten f/g zu, wobei im Fall des Quotienten die Ableitung nur für Punkte z gebildet werden kann, für die $g(z) \neq 0$ gilt. In allen drei Fällen gelten die gleichen Regeln wie im Reellen, d. h.

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \ , \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \ .}$$

Auch die *Kettenregel* behält im Komplexen die gleiche Form wie im Reellen. Ist etwa $h = f \circ g$ eine zusammengesetzte Funktion mit $h(z) = f(g(z))$, so gilt

$$\boxed{h'(z) = f'(g(z))g'(z) \ .}$$

Es sei daran erinnert, dass die Kettenregel eine besonders einprägsame Form erhält, wenn man $f(g(z))$ als eine (mittelbare) Funktion der Variablen z auffasst und die auftretenden Ableitungen als Differentialquotienten geschrieben werden:

$$\boxed{\frac{df}{dz} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dz} \ .}$$

Für die Potenzfunktion $f(z) = z^n$ erhält man in gleicher elementarer Weise wie im Reellen die Ableitung

$$f(z) = z^n \quad \Longrightarrow \quad f'(z) = nz^{n-1} \ .$$

Auch ein Polynom der Form

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \ , \quad a_\nu \in \mathbb{C} \ , \ n \geq 1$$

wird wie im Reellen differenziert, besitzt also die Ableitung

$$P'(z) = nz^{n-1} + a_{n-1}\,(n-1)z^{n-2} + a_{n-2}\,(n-2)z^{n-3} + \cdots + a_1 \ .$$

Die Verallgemeinerung auf Funktionen, die durch Potenzreihen dargestellt werden, ist ebenfalls möglich, und zwar kann eine Potenzreihe

$$B(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

innerhalb ihres *Konvergenzgebietes* gliedweise differenziert werden:

$$B'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \, \nu z^{\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu+1} \, (\nu+1) z^\nu \ .$$

Ist eine Funktion f an einer Stelle z_0 (komplex) differenzierbar, so kann f in einer kleinen Umgebung von z_0 näherungsweise durch eine lineare Funktion dargestellt werden:

$$f(z) \approx f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) \ .$$

Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *Linearisierbarkeit* der Funktion f und kann zeigen, dass diese Eigenschaft äquivalent zur komplexen Differenzierbarkeit ist.

Es sei betont, dass in den Anwendungen häufig auch Funktionen auftreten, die nicht komplex differenzierbar sind. Beispielsweise können so einfache Funktionen wie $f(z) = z^*$ oder $g(z) = |z|^2$ nicht komplex differenziert und damit auch nicht in der angegebenen Weise linearisiert werden. Der Differentiationskalkül kann zwar erweitert werden, um auch diese Funktionen zu erfassen; dies ist aber nicht Gegenstand dieses Textes.

Die Exponentialfunktion. Wie im Reellen lässt sich die *Exponentialfunktion* exp auch im Komplexen mit Hilfe ihrer Potenzreihe definieren:

$$\exp z := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \ . \tag{8}$$

Diese Reihe konvergiert, wie etwa mit dem Quotientenkriterium gezeigt werden kann, für alle $z \in \mathbb{C}$. Da eine Potenzreihe innerhalb des Konvergenzgebietes gliedweise differenziert werden kann, erhält man

$$\frac{d \exp z}{dz} = 1 + 2\,\frac{z}{2!} + 3\,\frac{z^2}{3!} + \cdots = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \exp z \ .$$

Aus diesem Ergebnis, das charakteristisch für die Exponentialfunktion ist, ergeben sich eine Vielzahl von Eigenschaften, von denen wir einige erwähnen wollen.

$$\boxed{\exp z \neq 0 \ , \quad \forall z \in \mathbb{C} \ .}$$

Zum Nachweis betrachten wir die Funktion f mit

$$f(z) = \exp z \cdot \exp(-z)$$

und bilden ihre Ableitung:

$$f'(z) = \exp z \cdot \exp(-z) - \exp z \cdot \exp(-z) = 0 \ .$$

Die Funktion f ist also konstant. Wegen $f(0) = \exp 0 \cdot \exp 0 = 1$ gilt somit

$$\exp z \cdot \exp(-z) = 1 \ , \quad \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

Hieraus folgt $\exp z \neq 0$ und

$$\boxed{\exp(-z) = \frac{1}{\exp z} \ .} \tag{9}$$

Eine weitere Eigenschaft kommt in dem *Additionstheorem* zum Ausdruck, das sich wie folgt formulieren lässt:

$$\boxed{\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w \ , \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \ .} \tag{10}$$

Zum Beweis dieses Gesetzes betrachten wir die Funktion

$$f(z) = \exp(z + w) \exp(-z) \exp(-w) \ ,$$

wobei w eine beliebige komplexe Konstante ist. Die Ableitung df/dz ist wieder null; folglich ist f konstant. Für $z = 0$ erhalten wir

$$f(0) = \exp w \cdot \exp(-w) = 1$$

und somit

$$\exp(z + w) \exp(-z) \exp(-w) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w \ .$$

Da (10) der üblichen Potenzregel entspricht, schreibt man statt $\exp z$ auch e^z mit $e := \exp 1$. Der Zusammenhang (10) kann somit in der besonders einprägsamen Form

$$\boxed{e^{z+w} = e^z e^w \ .} \tag{11}$$

dargestellt werden.

Die komplexe Konjugation der Exponentialfunktion ergibt

$$(\exp z)^* = \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \Big)^* = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\frac{z^\nu}{\nu!} \Big)^* = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{*\nu}}{\nu!} = \exp z^* \ .$$

Hieraus folgt

$$|\exp z|^2 = \exp z \cdot (\exp z)^* = \exp z \cdot \exp z^* = \exp(z + z^*) = \exp(2 \,\mathrm{Re}\, z) \ . \tag{12}$$

Da $\exp z$ nie null wird, der Betrag $|\exp z|$ also stets positiv bleibt, nimmt die Exponentialfunktion auf der reellen Achse nur positive Werte an:

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \implies \exp x > 0\ .}$$

Aus (12) schließen wir

$$\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}\ .}$$

Für $z = x > 0$ erkennen wir anhand der Reihe (8) sofort

$$x > 0 \implies \exp x > 1\ .$$

Wegen $\exp(-x) = 1/\exp x$ (siehe (9)) folgt weiter

$$x < 0 \implies \exp x < 1\ .$$

Somit gilt folgende Äquivalenz:

$$\boxed{|e^z| = 1 \iff \operatorname{Re} z = 0\ .}$$

Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen. Wir setzen $z = j\phi$ mit $\phi \in \mathbb{R}$ und betrachten die Potenzreihe für $e^{j\phi}$:

$$\begin{aligned} e^{j\phi} &= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - j\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + j\frac{\phi^5}{5!} - \cdots \\ &= 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \cdots + j\Big(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \cdots\Big) \\ &= \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\phi^{2\nu}}{(2\nu)!}}_{\cos\phi} + j \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\phi^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}}_{\sin\phi}\ . \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir die EULERsche Gleichung

$$\boxed{e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi\ .}$$

Ersetzen wir ϕ durch $-\phi$, folgt weiter

$$\boxed{e^{-j\phi} = \cos\phi - j\sin\phi\ .}$$

Die Auflösung nach Cosinus und Sinus ergibt schließlich

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} = \operatorname{Re} e^{j\phi}\ , \\ \sin\phi &= \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} = \operatorname{Im} e^{j\phi}\ . \end{aligned}}$$

Wir können jetzt auch e^z für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ nach Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x \cos y + je^x \sin y \ .$$

Aus der Beziehung $e^z e^{-z} = 1$ bzw. $e^{j\phi} e^{-j\phi} = 1$ finden wir eine weitere Bestätigung für die bekannte Gleichung

$$\boxed{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1 \ .} \tag{13}$$

Ergänzend sei bemerkt, dass die Cosinus- und die Sinusfunktion auch für komplexe Argumente definiert sind und dass man für beliebige $z \in \mathbb{C}$ die Ausdrücke

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}} \tag{14}$$

sinnvoll verwenden kann. Beispielsweise bleibt auch die Gleichung (13) gültig, wenn ϕ durch eine beliebige komplexe Zahl z ersetzt wird:

$$\boxed{\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ , \quad z \in \mathbb{C} \ .}$$

Polardarstellung einer komplexen Zahl. Dem Bild 3 entnehmen wir, dass jede komplexe Zahl z, die auf dem Rand des Einheitskreises liegt, also die Eigenschaft $|z| = 1$ besitzt, sich darstellen lässt in der Form

$$z = \cos \phi + j \sin \phi = e^{j\phi} \ .$$

Bis auf Vielfache von 2π ist der Winkel ϕ eindeutig bestimmt. Häufig legt man ein "Grundintervall" für ϕ gemäß

$$-\pi < \phi \leq \pi \quad \text{oder} \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

fest. Besonders erwähnt seien noch folgende spezielle Werte von $e^{j\phi}$:

$$e^{j0} = 1 \ , \quad e^{j\pi/2} = j \ , \quad e^{j\pi} = -1 \quad \text{und} \quad e^{-j\pi/2} = -j \ .$$

Da man jede komplexe Zahl $z = x + jy$ mit $z \neq 0$ in der Form

$$z = |z| \frac{z}{|z|}$$

schreiben kann und $z/|z|$ den Betrag 1 hat, lässt sich z stets darstellen gemäß

$$z = |z| e^{j\phi} = |z| \cos \phi + j |z| \sin \phi \ . \tag{15}$$

Diese Form der Darstellung einer komplexen Zahl heißt *Polardarstellung*. Die reellen Größen $|z|$ und ϕ bezeichnet man als die *Polarkoordinaten*. Die reelle Zahl ϕ, die, wie

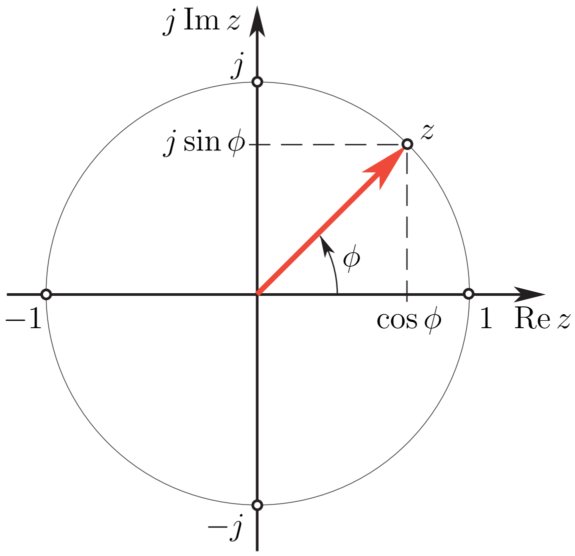

Bild 3: Komplexe Zahl z auf dem Einheitskreis

bereits gesagt, nur bis auf ganzzahliges Vielfaches von 2π festliegt, heißt *Phase* oder *Arcus* der Zahl z und wird symbolisch durch

$$\phi = \operatorname{arc} z$$

gekennzeichnet. Die Zahl $z = 0$ kann natürlich mit $|z| = 0$ auch in der Form (15) dargestellt werden, allerdings ist die Phase beliebig. Unterscheiden sich zwei Phasen ϕ und ϕ' nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, gibt es also eine ganze Zahl k, so dass gilt

$$\phi - \phi' = k2\pi \ ,$$

so bezeichnen wir ϕ und ϕ' als äquivalent und drücken diese Äquivalenz wie folgt aus:

$$\phi \sim \phi' \ .$$

Zur Berechnung der Phase. Bei der Berechnung der Phase ϕ einer komplexen Zahl z mit der Arcustangens-Funktion ist Vorsicht geboten. Für $\operatorname{Re} z \neq 0$ genügt die Phase der Beziehung

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \ .$$

Man könnte daher daran denken, ϕ wie folgt zu berechnen:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) \ .$$

Diese Formel ist allerdings nur richtig, wenn z einen positiven Realteil besitzt. Hat z einen negativen Realteil, so muss dieses Ergebnis durch Subtraktion oder Addition von π korrigiert werden. Beachtet man noch die beiden Sonderfälle

$$\operatorname{Re} z = 0 \wedge \operatorname{Im} z > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} z = 0 \wedge \operatorname{Im} z < 0 \ ,$$

so kann man schreiben

$$\phi = \operatorname{arc} z = \begin{cases} \arctan(\operatorname{Im} z/\operatorname{Re} z) & \text{für } \operatorname{Re} z > 0 \\ \pi/2 & \text{für } \operatorname{Re} z = 0 \wedge \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } \operatorname{Re} z = 0 \wedge \operatorname{Im} z < 0 \\ \arctan(\operatorname{Im} z/\operatorname{Re} z) \pm \pi & \text{für } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases} .$$

Für $z = 0$ wird die Phase nicht definiert.

Die Vorteile der Polardarstellung komplexer Zahlen zeigen sich insbesondere im Zusammenhang mit der Multiplikation und Division. Werden zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = |z_1|e^{j\phi_1} \quad \text{und} \quad z_2 = |z_2|e^{j\phi_2} \tag{16}$$

miteinander multipliziert, so folgt unter Beachtung des Potenzgesetzes (11) für das Produkt $z = z_1 z_2$

$$z = |z|e^{j\phi} \quad \text{mit} \quad |z| = |z_1||z_2| \quad \text{und} \quad \phi = \phi_1 + \phi_2$$

Die Beträge werden also multipliziert und die Phasen addiert. Dies gilt in entsprechender Weise auch für die Multiplikation von mehr als zwei komplexen Zahlen:

$$\prod_\nu |z_\nu|e^{j\phi_\nu} = |z|e^{j\phi} \quad \text{mit} \quad |z| = \prod_\nu |z_\nu| \quad \text{und} \quad \phi = \sum_\nu \phi_\nu \ .$$

Wird das auf der Seite 5 definierte Skalarprodukt zweier Zahlen z_1 und z_2 mit Hilfe der Polardarstellung berechnet, wobei z_1 und z_2 wieder durch (16) gegeben seien, so folgt

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re} z_1 z_2^* = |z_1||z_2| \operatorname{Re} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

bzw.

$$\boxed{\langle z_1, z_2 \rangle = |z_1||z_2| \cos(\phi_1 - \phi_2) \ .}$$

Man erkennt, dass für $z_1 \neq 0$ und $z_2 \neq 0$ das Skalarprodukt genau dann null ist, wenn $\cos(\phi_1 - \phi_2) = 0$. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn die Differenz $\phi_1 - \phi_2$ ein ungeradzahliges Vielfaches von $\pi/2$ ist, d. h., wenn z_1 und z_2 senkrecht aufeinander stehen.

Soll der Quotient $z = z_1/z_2$ in Polarkoordinaten dargestellt werden, so folgt mit $z_1 = |z_1| \exp(j\phi_1)$ und $z_2 = |z_2| \exp(j\phi_2) \neq 0$ ebenfalls auf Grund des Potenzgesetzes

$$z = \frac{|z_1|e^{j\phi_1}}{|z_2|e^{j\phi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \ .$$

Die Hyperbelfunktionen. In der Leitungstheorie treten neben den trigonometrischen Funktionen häufig auch die Hyperbelfunktionen auf. Die Funktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* werden für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert gemäß

$$\boxed{\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \ .} \tag{17}$$

Da e^z und e^{-z} die Potenzreihen

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$$
$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-z)^\nu}{\nu!}$$

besitzen, können wir für cosh und sinh sofort folgende Reihen angeben, die in der gesamten komplexen Ebene konvergieren:

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$$
$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \ .$$

Mit Hilfe der Definitionsgleichungen (17) überzeugt man sich leicht, dass die hyperbolischen Funktionen der Gleichung

$$\boxed{\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1}$$

genügen.

Zwischen den trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus und den hyperbolischen Funktionen besteht offenbar ein enger Zusammenhang; dieser ergibt sich unmittelbar aus (14) und (17) wie folgt:

$$\sinh jz = j \sin z \quad \text{bzw.} \quad \sin jz = j \sinh z \tag{18}$$
$$\cosh jz = \cos z \quad \text{bzw.} \quad \cos jz = \cosh z \ . \tag{19}$$

Additionstheoreme. Aus dem Additionstheorem der Exponentialfunktion, d. h. aus

$$e^{z+w} = e^z e^w \ , \tag{20}$$

lassen sich ohne größeren Aufwand eine Vielzahl von Additionstheoreme für die trigonometrischen und die hyperbolischen Funktionen herleiten. Dies soll anhand einiger einfacher Beispiele demonstriert werden.

Wir setzen $z = j\alpha$ und $w = j\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) und drücken die Exponentialfunktionen in (20) durch Cosinus und Sinus aus:

$$\cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta) = (\cos\alpha + j \sin\alpha) \cdot (\cos\beta + j \sin\beta) \ . \tag{21}$$

Führen wir die Multiplikation auf der rechten Seite aus und vergleichen Real- und Imaginärteile miteinander, so folgt:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \tag{22}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \ . \tag{23}$$

Wir haben diese Beziehungen zwar unter der Voraussetzung hergeleitet, dass α und β reell sind. Es sei aber betont, dass diese Beziehungen gültig bleiben, wenn α und β beliebige komplexe Werte annehmen. Um dies zu zeigen, dürfen wir allerdings nicht die Zerlegung von (21) nach Real- und Imaginärteil vornehmen. Am einfachsten ist es, in (21) α und β durch $-\alpha$ und $-\beta$ zu ersetzen:

$$\cos(\alpha+\beta) - j\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha - j\sin\alpha)\cdot(\cos\beta - j\sin\beta)\ . \tag{24}$$

Addition und Subtraktion von (21) und (24) führen dann auf die Beziehungen (22) und (23). In entsprechender Weise erhält man für die Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned}\cosh(\alpha+\beta) &= \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta\\ \sinh(\alpha+\beta) &= \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta\ .\end{aligned}$$

Auch hier können wir feststellen, dass die Gleichungen für beliebige komplexe Werte von α und β gelten.

Gelegentlich steht man vor der Aufgabe, Ausdrücke wie $\cosh(\alpha+j\beta)$ oder $\sin(\alpha+j\beta)$ mit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ nach Real- und Imaginärteil zerlegen zu müssen. Dieses gelingt sofort mit diesen Additionstheoremen in Verbindung mit den Beziehungen (18) und (19). Für $\cosh(\alpha+j\beta)$ erhält man beispielsweise

$$\cosh(\alpha+j\beta) = \cosh\alpha\cosh j\beta + \sinh\alpha\sinh j\beta = \cosh\alpha\cos\beta + j\sinh\alpha\sin\beta$$

und für $\sinh(\alpha+j\beta)$

$$\sinh(\alpha+j\beta) = \sinh\alpha\cosh j\beta + \cosh\alpha\sinh j\beta = \sinh\alpha\cos\beta + j\cosh\alpha\sin\beta\ .$$

Es lassen sich dann hiermit auch Probleme lösen wie etwa die Bestimmung des Winkels γ in der Gleichung $\sin\gamma = 5$.

Schließlich sei bemerkt, dass sich Potenzen der trigonometrischen und der hyperbolischen Funktionen sehr einfach mit Hilfe der Eulerschen Formel umwandeln lassen. Erläutert sei dies an einem einfachen Beispiel. Gegeben sei etwa $\cos^4\alpha$. Man stellt dann die Cosinus-Funktion mit Hilfe der Eulerschen Formel dar und bildet von dem Binom die vierte Potenz:

$$\begin{aligned}\cos^4\alpha &= \Big(\frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}\Big)^4 = \frac{1}{16}(e^{j4\alpha} + 4e^{j2\alpha} + 6 + 4^{-j2\alpha} + e^{-j4\alpha})\\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha\ .\end{aligned}$$

Darstellung sinusförmiger Größen durch komplexe Exponentialschwingungen. Die komplexe Wechselstromrechnung basiert ganz wesentlich auf der Möglichkeit, die Zeitabhängigkeit einer sinusförmigen Größe, also etwa einer Spannung oder eines Stromes, durch eine komplexe Exponentialschwingung ausdrücken zu können. Zur Erläuterung betrachten wir eine elektrische Spannung u, die einen sinusförmigen Zeitverlauf haben möge

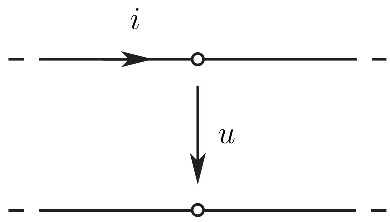

Bild 4: Tor mit der Spannung u und dem Strom i

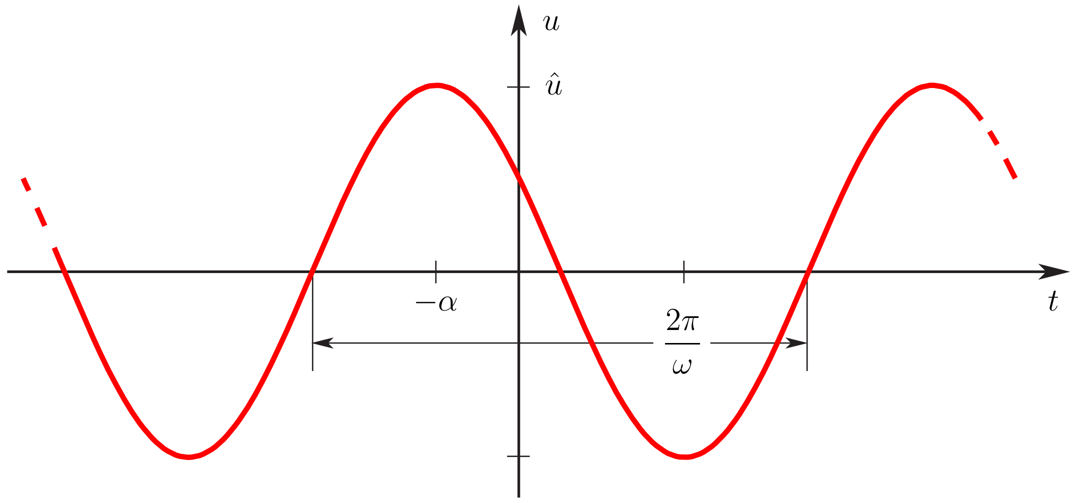

Bild 5: Sinusförmige Spannung der (Kreis)-Frequenz ω

(siehe Bild 5) und beispielsweise zwischen den zwei Klemmen eines Tores auftritt. Die Spannung kann dann stets gemäß

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \alpha) \tag{25}$$

dargestellt werden, wobei $\hat{u}$, ω und α reelle Konstanten sind. Die Größe $\hat{u}$ und heißt *Scheitelwert*, ω ist die (Kreis)-*Frequenz* und α der sogenannte *Nullphasenwinkel* oder kurz die *Phase*. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, dürfen wir annehmen, dass $\hat{u}$ nichtnegativ ist.

Mit Hilfe der Exponentialfunktion kann die Spannung u offenbar auch wie folgt geschrieben werden:

$$u(t) = \operatorname{Re} U e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad U = |U| e^{j\alpha}\ ,\ |U| = \hat{u}\ . \tag{26}$$

Da die Exponentialfunktion in diesem Zusammenhang eine (Sinus)-Schwingung beschreibt, bezeichnet man die Funktion $e(t) = e^{j\omega t}$ auch als *Exponentialschwingung*. Unterstellt man eine feste Frequenz ω, so kann die Spannung u entweder durch die beiden reellen Zahlen $\hat{u}$ und α oder durch die komplexe Zahl U eindeutig charakterisiert werden. Man nennt U die *komplexe Amplitude* der Spannung u. Wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, bezeichnet man U auch einfach als *komplexe Spannung* oder – der Kürze wegen – nur als Spannung.

Bevor wir näher auf die komplexe Wechselstromrechnung eingehen, wollen wir anhand eines einfachen Beispiels auf einen Vorteil hinweisen, den die komplexe Darstellung eines sinusförmigen Signals bringt. Wir betrachten die Addition zweier sinusförmiger Spannungen, u_1 und u_2, mit gleicher Frequenz, aber beliebigen Scheitelwerten und Phasen (siehe Bild 6). Zur Ermittlung des Ergebnisses verwenden wir sowohl die reelle Methode als auch die komplexe.

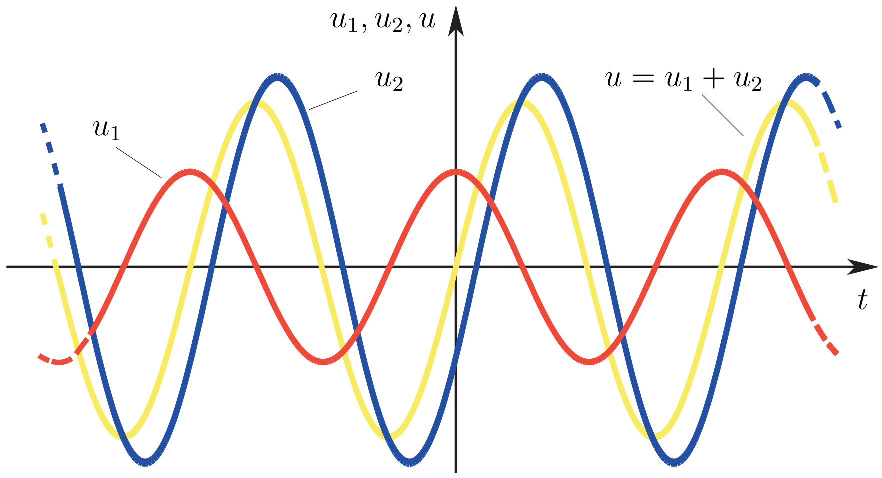

Bild 6: Zur Addition zweier sinusförmiger Spannungen

Reelle Methode:
Wir stellen u_1 und u_2 in der Form (25) dar und schreiben

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = \hat{u}_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + \hat{u}_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \ .$$

Das Ergebnis der Addition ist wieder eine Spannung mit der Frequenz ω, die wir in der Form

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \alpha)$$

angeben können. Zur Bestimmung des Scheitelwertes $\hat{u}$ und der Phase α gehen wir wie folgt vor. Unter Verwendung des Additionstheorems (22) stellen wir u_1 und u_2 gemäß

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cos\alpha_1 \cos\omega t - \hat{u}_1 \sin\alpha_1 \sin\omega t \ , \tag{27}$$

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \cos\alpha_2 \cos\omega t - \hat{u}_2 \sin\alpha_2 \sin\omega t \tag{28}$$

dar. Nach der Addition von u_1 und u_2 fassen wir die resultierenden Terme geeignet zusammen, so dass wir schreiben können

$$u(t) = a \cos\omega t - b \sin\omega t \tag{29}$$

mit

$$a = \hat{u}_1 \cos\alpha_1 + \hat{u}_2 \cos\alpha_2 \quad \text{und} \quad b = \hat{u}_1 \sin\alpha_1 + \hat{u}_2 \sin\alpha_2 \ .$$

Um auf (29) das Additionstheorem (22) in umgekehrter Richtung anwenden zu können, dividieren wir a und b durch $\sqrt{a^2 + b^2}$ und erhalten

$$u(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\omega t - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\omega t \right) \ .$$

Da die Summe der Quadrate der Faktoren $a/\sqrt{a^2+b^2}$ und $b/\sqrt{a^2+b^2}$ gerade 1 ist, können wir diese Faktoren mit $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ identifizieren:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{bzw.} \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \ .$$

Hieraus lässt sich eindeutig ein α aus dem Intervall $0 \le \alpha < 2\pi$ bestimmen. Mit diesem α erhalten wir dann das gewünschte Ergebnis:

$$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \alpha) \quad \text{mit} \quad \hat{u} = \sqrt{a^2+b^2} \ .$$

Komplexe Methode:
Wir stellen u_1 und u_2 in der Form (26) dar und schreiben

$$u = u_1 + u_2 = \operatorname{Re} U_1 e^{j\omega t} + \operatorname{Re} U_2 e^{j\omega t} \ .$$

Hieraus folgt sofort das gewünschte Ergebnis:

$$u = \operatorname{Re} U e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad U = U_1 + U_2 \ .$$

Mit anderen Worten, die komplexe Amplitude der Summenspannung ist gleich der Summe der komplexen Amplituden U_1 und U_2.

Die komplexe Wechselstromrechnung. Die Darstellung der Sinus- und Cosinusfunktion durch die komplexe Exponentialfunktion führt zu erheblichen Vereinfachungen bei der Berechnung linearer Schaltungen. Dies wird besonders deutlich im Rahmen der sogenannten *komplexen Wechselstromrechnung.* Hierbei betrachtet man sinusförmig erregte lineare Schaltungen unter stationären Bedingungen, d. h., wenn sämtliche Ausgleichsvorgänge abgeklungen sind und alle Spannungen und Ströme sinusförmig verlaufen. Zur Analyse einer derartigen Schaltung werden die Definitionsgleichungen der Elemente und Quellen sowie die KIRCHHOFFschen Regeln benötigt. Da die KIRCHHOFFschen Regeln algebraischer Natur sind, gelten sie nicht nur für die Spannungen und Ströme, sondern in gleicher Form auch für die entsprechenden komplexen Amplituden.

Sei etwa

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0 \tag{30}$$

die sich bei einem Spannungsumlauf in einer Schleife mit n Zweigen ergebende Gleichung. Da jede dieser Spannungen nach Voraussetzung sinusförmig verläuft und durch

$$u_\nu(t) = \operatorname{Re} U_\nu e^{j\omega t} \ , \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

dargestellt werden kann, erhalten wir unmittelbar

$$\operatorname{Re}(U_1 + U_2 + \cdots + U_n) e^{j\omega t} = 0 \ .$$

Diese Gleichung gilt für alle t, insbesondere also auch für $t = 0$ und $t = -\frac{1}{2}\pi/\omega$. Wegen $\mathrm{e}^0 = 1$ und $\mathrm{e}^{-j\pi/2} = -j$ folgt sofort

$$\operatorname{Re}(U_1 + U_2 + \cdots + U_n) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(U_1 + U_2 + \cdots + U_n) = 0$$

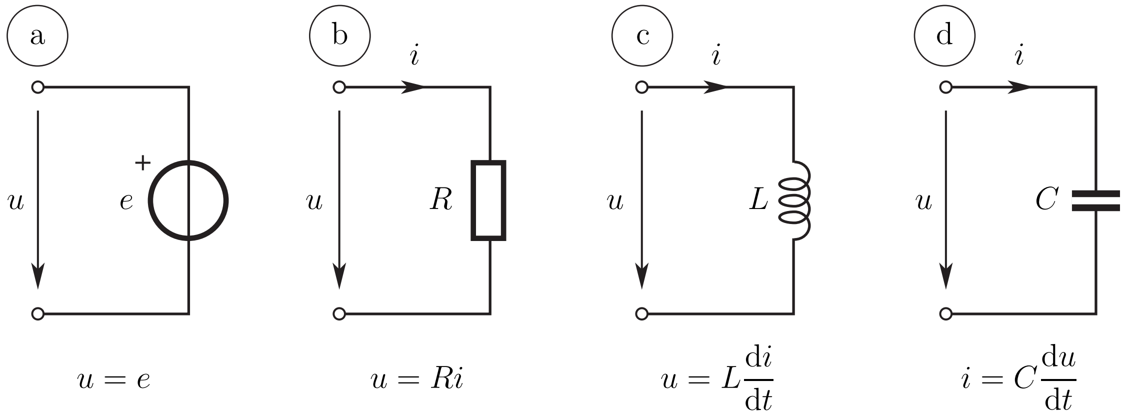

Bild 7: Einige Bausteine einer elektrischen Schaltung mit den zugehörigen Definitionsgleichungen: (a) ideale Spannungsquelle, (b) Widerstand, (c) Induktivität und (d) Kapazität

und somit

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 0 \ . \tag{31}$$

Da umgekehrt (31) die Gleichung (30) impliziert, sind (30) und (31) tatsächlich äquivalent. Mit der gleichen Argumentation kann offenbar Entsprechendes auch in bezug auf die KIRCHHOFFsche Stromregel gesagt werden.

Die Definitionsgleichungen einer Quelle oder eines Widerstandes (siehe Bild 7a und b) sind ebenfalls algebraischer Natur und können unmittelbar auf die komplexen Amplituden übertragen werden. Andere Elemente, zu denen die Induktivität und die Kapazität gehören, werden durch Gleichungen definiert, in denen jeweils eine Ableitung nach der Zeit auftritt (siehe Bild 7c und d). So lauten die Definitionsgleichungen dieser beiden Elemente, die auch als *reaktive Elemente* bezeichnet werden,

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \ .$$

Wird in der Definitionsgleichung der Induktivität der Strom gleich $i(t) = \mathrm{Re}\, I e^{j\omega t}$ gewählt und berücksichtigt, dass der Differentiationsoperator mit dem Re-Operator vertauschbar und L eine reelle Konstante ist, so folgt für die Spannung über der Induktivität

$$u(t) = \mathrm{Re}\, U e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad U = j\omega L I \ .$$

Die entsprechende Beziehung für die Kapazität lautet

$$i(t) = \mathrm{Re}\, I e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad I = j\omega C U \ .$$

Obwohl der Strom, der durch die Induktivität fließt, und die Spannung, die über der Kapazität liegt, jeweils einer zeitlichen Ableitung unterworfen werden, ergeben sich für die zugehörigen komplexen Amplituden algebraische Beziehungen, nämlich

$$U = j\omega L I \quad \text{bzw.} \quad I = j\omega C U \ . \tag{32}$$

Folglich treten bei der Berechnung einer sinusförmig erregten linearen Schaltung unter stationären Bedingungen nur algebraische Gleichungen auf. Die Beziehungen (32) sind

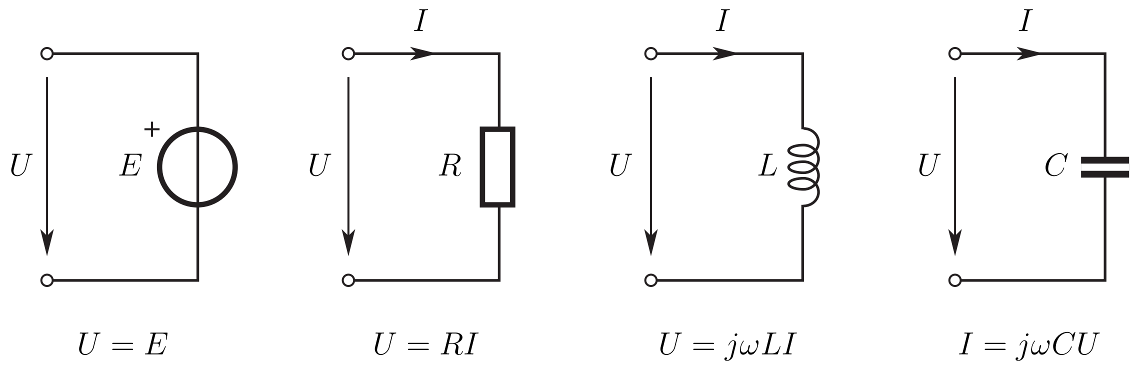

Bild 8: Beschreibung der Bausteine aus Bild 7 mit Hilfe komplexer Amplituden

gewissermaßen Verallgemeinerungen des OHMschen Gesetzes, das im Fall des Widerstandes die Form $U = RI$ bzw. $I = GU$ mit $G = 1/R$ besitzt. Die Größe $Z_L = j\omega L$ wird als *Impedanz* und der Kehrwert, $Y_L = 1/Z_L$, als *Admittanz* der Induktivität bezeichnet. Entsprechend bezeichnet man $Y_C = j\omega C$ als die Admittanz und $Z_C = 1/Y_C$ als die Impedanz der Kapazität. Gelegentlich wird die Impedanz auch komplexer Widerstand und die Admittanz komplexer Leitwert genannt. Auf eine Verwendung dieser Begriffe sollte allerdings verzichtet werden, da im Zusammenhang mit der Behandlung komplexer Systeme schnell Missverständnisse entstehen können. Darüber hinaus sei erwähnt, dass sich in der internationalen Literatur ohnehin die englischsprachigen Begriffe *impedance* und *admittance* durchgesetzt haben.

Bemerkungen: Dem aufmerksamen Leser wird aufgefallen sein, dass bei der Bezeichnung der reaktiven Bauelemente die Begriffe *Spule* und *Kondensator* vermieden wurden, obwohl die zugehörigen Schaltsymbole an eine aus Draht gewickelte Spule bzw. an einen Plattenkondensator erinnern. Eigentlich wird mit den Begriffen Induktivität bzw. Kapazität ja nicht das tatsächliche reale Bauelement bezeichnet, sondern nur dessen wesentliche Eigenschaft. Die in der Netzwerktheorie auftretenden Elemente, wie Kapazitäten, Induktivitäten, Widerstände etc., muss man sich als räumlich sehr kleine Gebilde vorstellen; sie werden daher häufig als *konzentrierte Elemente* bezeichnet. Strenggenommen haben diese keine räumliche Ausdehnung, und die Verbindungsdrähte zwischen den Elementen und Quellen werden als ideal aufgefasst, d. h. insbesondere als widerstandslos. Vergleichbar ist diese Betrachtungsweise übrigens mit den in der Mechanik gebräuchlichen Konzepten der Punktmasse und des starren Körpers.

Beispiel: Wir wollen nun einige Ergebnisse der komplexen Wechselstromrechnung anhand eines Beispiels rekapitulieren und eine einfache Filterschaltung (Bild 9) analysieren. Die Spannung der idealen Quelle, die mit $e(t)$ bezeichnet ist, sei als sinusförmiges Signal gegeben, d. h. als ein Signal der Form

$$e(t) = \hat{e}\cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\, E e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad E = |E| e^{j\alpha} \text{ und } |E| = \hat{e}\ . \tag{33}$$

Zu ermitteln ist die Spannung u unter stationären Bedingungen. Für die Ströme i_1 und i_2 sowie für die Spannung u können wir daher schreiben

$$i_1 = \mathrm{Re}\, I_1 e^{j\omega t}\ , \quad i_2 = \mathrm{Re}\, I_2 e^{j\omega t} \quad \text{bzw.} \quad u = \mathrm{Re}\, U e^{j\omega t}\ .$$

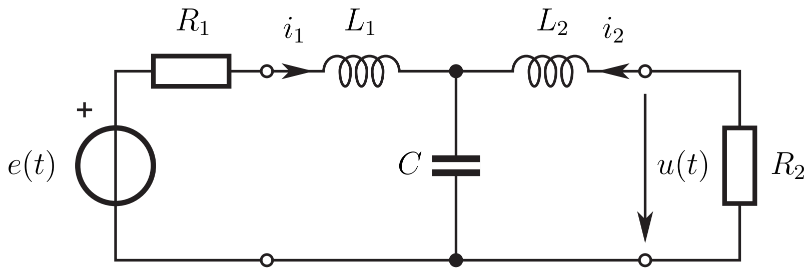

Bild 9: Einfache Filterschaltung

Die Bestimmung der komplexen Amplituden, d. h. der Größen I_1, I_2 und U, kann beispielsweise mit dem sogenannten Schleifenstromverfahren geschehen. Zur Aufstellung der entsprechenden Gleichungen ersetzen wir, wie in Bild 10 gezeigt, die tatsächlichen Ströme und Spannungen durch die jeweiligen komplexen Amplituden.

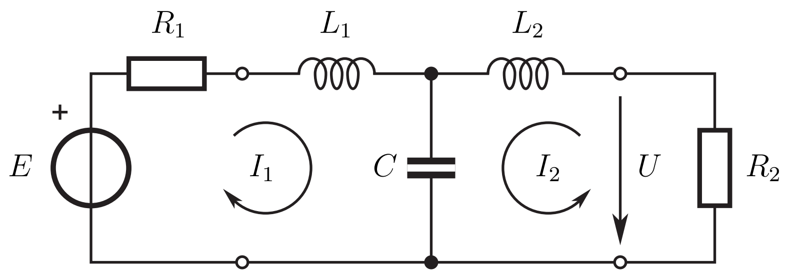

Bild 10: Schaltung aus Bild 9; Ströme und Spannungen sind ersetzt durch die jeweiligen komplexen Amplituden

Für die beiden Ströme I_1 und I_2 (genauer: für die komplexen Amplituden der Ströme) erhalten wir dann das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_1 + 1/j\omega C & 1/j\omega C \\ 1/j\omega C & R_2 + j\omega L_2 + 1/j\omega C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

das mit einem Standardverfahren aus der linearen Algebra gelöst werden kann.

Da uns die Spannung u bzw. die zugehörige komplexe Amplitude U interessiert, brauchen wir wegen der Beziehung $U = -R_2 I_2$ das Gleichungssystem nur für I_2 zu lösen. Nach Elimination von I_1 erhalten wir für I_2

$$I_2 = \frac{-E}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + CR_1R_2) + (j\omega)^2(L_1R_2 + L_2R_1)C + (j\omega)^3 CL_1L_2}$$

und daher für U

$$U = -R_2 I_2 = H(j\omega)E$$

mit

$$H(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + CR_1R_2) + (j\omega)^2(L_1R_2 + L_2R_1)C + (j\omega)^3 CL_1L_2} ,$$

der sogenannten *Übertragungsfunktion*. Der zeitliche Verlauf der Spannung u ist somit durch

$$u(t) = \mathrm{Re}\, U e^{j\omega t} = \mathrm{Re}\, H(j\omega) E e^{j\omega t}$$

gegeben. Stellen wir $H(j\omega)$ gemäß $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{-jB(\omega)}$ mit $B(\omega) = -\operatorname{arc} H(j\omega)$ dar und berücksichtigen (33), so können wir schreiben

$$u(t) = \mathrm{Re}\, |H(j\omega)||E|e^{j[\omega t + \alpha - B(\omega)]} = |H(j\omega)|\hat{e} \cos[\omega t + \alpha - B(\omega)]$$

und haben damit das gewünschte Ergebnis.

Die Tatsache, dass wir einen sinusförmigen Verlauf der Quellspannung vorausgesetzt haben, wirkt zunächst sehr einschränkend. Da aber, wie in der Signaltheorie gezeigt wird, beliebige Spannungsverläufe durch Superposition von Sinusschwingungen dargestellt werden können, lässt sich mit Hilfe des hier gewonnenen Ergebnisses die Ausgangsspannung der Filterschaltung auch dann berechnen, wenn die Quellspannung einen nahezu beliebigen zeitlichen Verlauf hat.

Leistung bei sinusförmigen Spannungen und Strömen. Wie bereits erwähnt, kann bei Verwendung der komplexen Rechnung häufig auf den expliziten Einsatz der üblichen Additionstheoreme verzichtet werden. Dies trifft beispielsweise bei der Berechnung der Wirkleistung im sinusförmigen Fall zu. Betrachtet werde das in Bild 11 dargestellte Tor

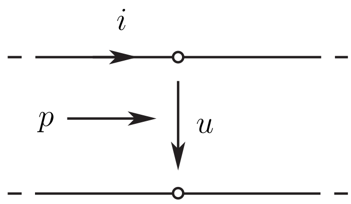

Bild 11: Tor mit der Spannung u, dem Strom i und der von links nach rechts übertragenen Leistung $p = ui$

mit der Spannung u und dem Strom i. Beide Größe seien sinusförmig, so dass sie durch

$$u(t) = \mathrm{Re}\, U e^{j\omega t} \quad \text{bzw.} \quad i(t) = \mathrm{Re}\, I e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad U = |U|e^{j\alpha} \quad \text{und} \quad I = |I|e^{j\beta}$$

repräsentiert werden können. Die von links nach rechts durch das Tor übertragene momentane Leistung $p = ui$ lautet dann

$$p(t) = u(t)i(t) = [\mathrm{Re}\, U e^{j\omega t}] \cdot [\mathrm{Re}\, I e^{j\omega t}] \ .$$

Da die angegebenen Realteile durch

$$\mathrm{Re}\, U e^{j\omega t} = \frac{U e^{j\omega t} + U^* e^{-j\omega t}}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}\, I e^{j\omega t} = \frac{I e^{j\omega t} + I^* e^{-j\omega t}}{2}$$

ausgedrückt werden können, erhalten wir für $p(t)$

$$p(t) = \frac{U e^{j\omega t} + U^* e^{-j\omega t}}{2} \cdot \frac{I e^{j\omega t} + I^* e^{-j\omega t}}{2} = \frac{1}{2}\, \mathrm{Re}\, U I^* + \frac{1}{2}\, \mathrm{Re}\, U I e^{j2\omega t} \ . \qquad (34)$$

Bilden wir von $p(t)$ den zeitlichen Mittelwert, also

$$P = \overline{p(t)} := \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt \ ,$$

wobei T, die Länge des Integrationsintervalls, durch $2\pi/\omega$ oder ein Vielfaches hiervon gegeben ist, so fällt der rechte Summand in (34), der ja mit $UI = |UI|e^{j(\alpha+\beta)}$ in der Form

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re} UIe^{j2\omega t} = \frac{|UI|}{2}\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

geschrieben werden kann, weg. Übrig bleibt die mittlere Leistung

$$P = \frac{1}{2}\operatorname{Re} UI^* = \frac{1}{2}|U||I|\cos(\alpha - \beta) \ ,$$

die als *Wirkleistung* bezeichnet wird[4].

Die komplexe Frequenz. Ersetzt man in der komplexen Exponentialschwingung die Größe $j\omega$ durch die komplexe Zahl p, schreibt also statt

$$u(t) = \operatorname{Re} Ue^{j\omega t} \quad \text{oder} \quad i(t) = \operatorname{Re} Ie^{j\omega t}$$

nun

$$u(t) = \operatorname{Re} Ue^{pt} \quad \text{bzw.} \quad i(t) = \operatorname{Re} Ie^{pt} \ , \tag{35}$$

so tritt auch in den Impedanzen und Admittanzen statt $j\omega$ jeweils die Größe p auf[5]. Die Impedanz der Induktivität lautet dann $Z_L = pL$ und die der Kapazität $Z_C = 1/pC$. Man kann zwar p als bloße Abkürzung für $j\omega$ interpretieren. Es besteht aber auch die Möglichkeit, für p beliebige komplexe Werte zuzulassen. Allerdings werden dann durch (35) keine sinusförmigen Vorgänge mehr beschrieben. Setzen wir $p = \sigma + j\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, so können wir den Ausdruck für $u(t)$ aus (35) wie folgt schreiben:

$$u(t) = e^{\sigma t}\operatorname{Re} Ue^{j\omega t} = |U|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \alpha) \quad \text{mit} \quad U = |U|e^{j\alpha} \ . \tag{36}$$

Der sich hieraus ergebende Zeitverlauf ist in Bild 12 für $\sigma > 0$ dargestellt. Es handelt sich um eine exponentiell ansteigende Schwingung; für $\sigma < 0$ tritt ein exponentiell abfallender Verlauf auf (siehe Bild 13).

---

[4] Es sei bemerkt, dass in der Elektrotechnik, und zwar insbesondere im energietechnischen Bereich, die Wirkleistung P gelegentlich auch gemäß

$$P = \operatorname{Re} UI^*$$

definiert wird. Die Beträge der komplexen Amplituden U und I entsprechen dann aber den jeweiligen Effektivwerten:

$$|U| = U_{\text{eff}} := \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad \text{bzw.} \quad |I| = I_{\text{eff}} := \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} \ .$$

Bei der Bestimmung der Momentanwerte von u und i tritt dann stets der Faktor $\sqrt{2}$ auf:

$$u(t) = \operatorname{Re}\sqrt{2}Ue^{j\omega t} \quad \text{bzw.} \quad i(t) = \operatorname{Re}\sqrt{2}Ie^{j\omega t} \ .$$

[5] Die Tatsache, dass das Symbol p auch schon für die momentane Leistung verwendet wurde, sollte nicht zu Missverständnissen führen, da aus dem jeweiligen Zusammenhang zu erkennen ist, welche Größe gemeint ist.

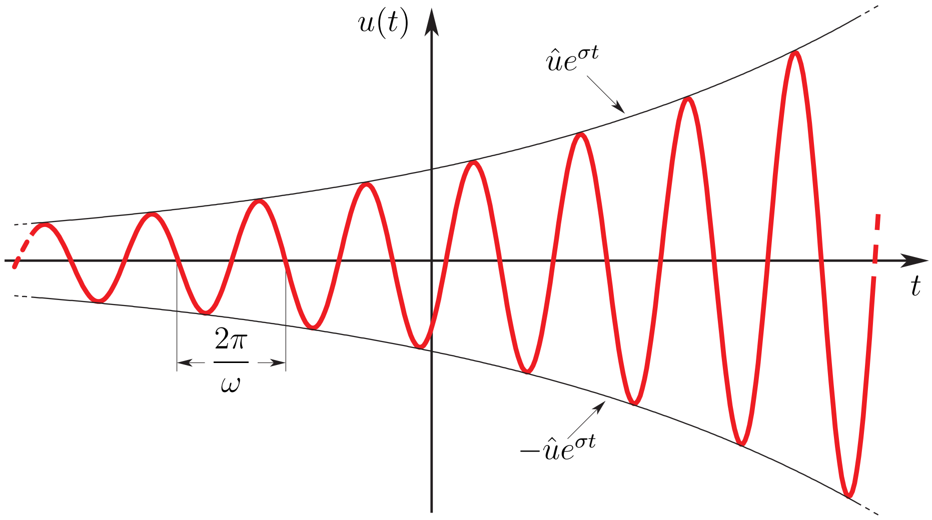

Bild 12: Schwingung gemäß (36) mit $\sigma > 0$

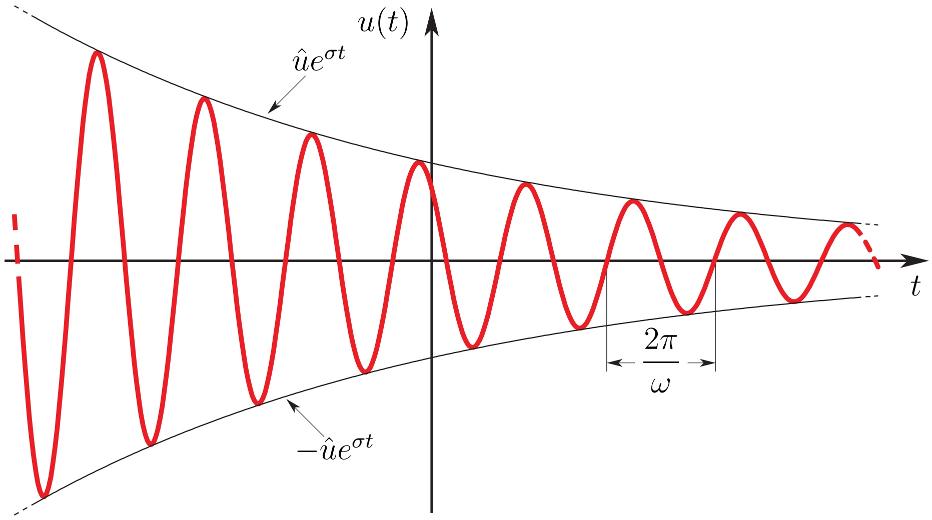

Bild 13: Schwingung gemäß (36) mit $\sigma < 0$

Statt eine lineare Schaltung mit einer sinusförmigen Spannung oder einem sinusförmigen Strom zu erregen, können wir uns auch vorstellen, sie mit exponentiell ansteigenden oder abfallenden Quellgrößen der Form

$$q(t) = \operatorname{Re} Q e^{pt} \quad \text{mit} \quad Q, p \in \mathbb{C}$$

zu erregen. Unter stationären Bedingungen haben dann alle in der Schaltung auftretenden Spannungen und Ströme einen entsprechenden Zeitverlauf. Als Konsequenz sind sämtliche Impedanzen, Admittanzen, Übertragungsfunktionen, Spannungsteilerverhältnisse etc. Funktionen der Größe $p = \sigma + j\omega$, die in diesem Zusammenhang auch als *komplexe Frequenz* bezeichnet wird.

Bei der Einführung der komplexen Wechselstromrechnung beginnt man traditionell mit der Einschränkung $p = j\omega$. Obwohl die komplexe Frequenz unter diesen Umständen imaginäre Werte annimmt, spricht man von einer *reellen Frequenz*. Wenn also eine Schaltung mit einer reellen Frequenz erregt wird, unterstellt man, dass die Quellgrößen einen sinusförmigen zeitlichen Verlauf haben. Wird die Schaltung mit einer exponentiell ansteigenden oder abfallenden Schwingung erregt, spricht man von einer Erregung mit einer komplexen Frequenz. In diesem Zusammenhang erhebt sich natürlich die Frage, warum man den Definitionsbereich der Impedanzen, Admittanzen, Übertragungsfunktionen etc. überhaupt auf die komplexe Ebene ausdehnen möchte.

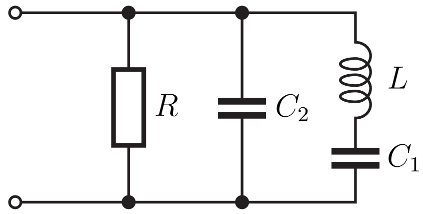

Bild 14: Einfaches passives Eintor

Die Antwort auf diese Frage ist sehr einfach: Wichtige Eigenschaften dieser Funktionen werden erst richtig deutlich, wenn man den Blick nicht nur auf die $j\omega$-Achse konzentriert, sondern ihn nach rechts und links richtet. Zur Erläuterung betrachten wir das in Bild 14 gezeigte passive Eintor, das die Impedanz

$$Z(p) = R\frac{p^2LC_1 + 1}{p^3LC_1C_2R + p^2LC_1 + p(C_1 + C_2)R + 1}$$

besitzt. Der Realteil dieser Funktion genügt auf der $j\omega$-Achse der Ungleichung

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0 \ .$$

Dies ist eine notwendige Bedingung dafür, dass das Eintor passiv ist. Diese Bedingung ist aber keinesfalls hinreichend. Beispielsweise erfüllt der Realteil der Funktion

$$Z'(p) = R\frac{p^2\tau^2 + 1}{2p^3\tau^3 + p^2\tau^2 + p\tau + 1} \quad \text{mit} \quad \tau > 0 \tag{37}$$

ebenfalls die Ungleichung

$$\operatorname{Re} Z'(j\omega) \geq 0 \ .$$

Es handelt sich hierbei aber nicht um die Impedanz eines passiven Eintors. Eine Schaltung für ein Eintor mit dieser Impedanz kann zwar angegeben werden; allerdings enthält die Schaltung zwei negative reaktive Elemente, nämlich eine negative Kapazität und eine negative Induktivität (siehe Bild 15). Diese Elemente können mit einem Kondensator oder einer Spule natürlich nicht dargestellt werden. Man kann sie allerdings näherungsweise mit elektronischen Schaltungen (also aktiv) realisieren.

Ohne Beweis sei hier bemerkt, dass eine gegebene rationale Funktion, Z, nur dann die Impedanz eines passiven Eintors sein kann, wenn der Realteil von Z in der abgeschlossenen rechten Halbebene nichtnegativ ist; also stets gilt

$$\boxed{\operatorname{Re} p \geq 0 \implies \operatorname{Re} Z(p) \geq 0 \ .}$$

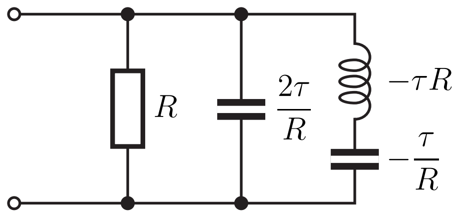

Bild 15: Eintor mit der in (37) definierten Impedanz Z'

Aus dieser Ungleichung folgt u. a., dass die Impedanz eines passiven Eintors weder Nullstellen noch Pole in der rechten komplexen Halbebene haben kann und dass etwaige Nullstellen und Pole auf der $j\omega$-Achse einfach sind. Die in (37) definierte Impedanz Z' hat übrigens eine reelle Polstelle in der linken Halbebene und ein konjugiert komplexes Polpaar in der rechten.

Der Begriff der komplexen Frequenz tritt auch im Zusammenhang mit einer wichtigen Integraltransformation auf, der sogenannten Laplace-Transformation. Diese Transformation ist ein wirkungsvolles mathematisches Instrument zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die mathematischen Voraussetzungen, die benötigt werden, um die Laplace-Transformation inhaltlich zu verstehen, gehen über den hier skizzierten Stoff aber weit hinaus.